UNIVERSITA' DEL SANNIO

CORSO DI FISICA 1

ESERCIZI + SVOLGIMENTO - VETTORI

I seguenti problemi si riferiscono ad un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale ortogonale monometrico *xyz*.

1. Dato un vettore $\vec{a} = (-1, 3, 2)$. Calcolare il modulo e l'angolo formato dal vettore con l'asse z.

- Il modulo è: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$; l'angolo formato dal vettore con l'asse z è: $\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

2. Calcolare il modulo della proiezione del vettore $\vec{a} = (1, -3, 2)$ nel piano *xy* e l'angolo formato dalla proiezione con l'asse *y*.

- Il modulo della proiezione del vettore nel piano *xy* è: $|\vec{a}|_{xy} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$; l'angolo formato dalla proiezione con l'asse *y* è: $\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, oppure $\varphi = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

3. Il vettore $\vec{a}$ di modulo $|\vec{a}| = 10$ forma un angolo di 60° con l'asse *z* e la sua proiezione nel piano *xy* forma un angolo di 45° con l'asse *x*. Calcolare le componenti di $\vec{a}$ lungo i tre assi coordinati.

- Le componenti del vettore $\vec{a}$ sono

$$a_x = |\vec{a}|\sin(60°)\cos(45°) = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$
$$a_y = |\vec{a}|\sin(60°)\sin(45°) = \frac{5}{2}\sqrt{6}\ .$$
$$a_z = |\vec{a}|\cos(60°) = 5$$

4. Dati due vettori $\vec{a}$ = (-1, 0, 3) e $\vec{b}$ = (2, 1, -1). Calcolare il vettore risultante $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}$ - 3$\vec{b}$.

- Le componenti del vettore risultante $\vec{a}+\vec{b}$ sono $(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)=(1,\ 1,\ 2)$, mentre $\vec{a}-3\vec{b}$ sono $(a_x-3b_x, a_y-3b_y, a_z-3b_z)=$(-7, -3, 6).

5. Dati tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tali che siano soddisfatte le seguenti proprietà: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, e $|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Cosa possiamo affermare circa la mutua posizione dei tre vettori? E se la proprietà tra i moduli fosse $|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$?

- I due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ devono essere collineari. Solo in questo caso il modulo del vettore risultante ($\vec{c}$) è la somma dei moduli dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Altrimenti, in generale, il modulo del vettore $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ è espresso in termini dei moduli di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$ come segue: $|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$, dove α è l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Per ottenere la relazione richiesta bisogna imporre $\cos\alpha=0$, quindi $\alpha=90°$. I vettori devono essere perpendicolari tra loro.

6. Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ tali che $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$. Quale proprietà soddisfa il vettore $\vec{b}$?

- Il vettore $\vec{b}$ deve essere nullo. Infatti possiamo scrivere $0=\vec{a}-\vec{a}=2\vec{b}$. Quindi $\vec{b}=0$.

7. Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di modulo $|\vec{a}|$ = 2 e $|\vec{b}|$ = 4. Determinare il modulo del vettore $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ sapendo che l'angolo compreso tra i vettori è 45°.

- Il modulo del vettore $\vec{c}$ è dato dalla formula generalizzata del Teorema di Pitagora: $|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}=\sqrt{(2)^2+(4)^2+2(2)(4)\cos(45°)}=2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

8. Dati due vettori $\vec{a}$ = (-1, 0, 3) e $\vec{b}$ = (2, 1, -1), calcolare il prodotto scalare $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ed il prodotto vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$ e $\vec{b}\times\vec{a}$.

- L'espressione del prodotto scalare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in termini delle loro componenti è $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=(-1)(2)+(0)(1)+(3)(-1)=-5$ Le componenti del prodotto vettoriale sono $(\vec{a}\times\vec{b})_x=a_y b_z-a_z b_y=(0)(-1)-(3)(1)=-3$, $(\vec{a}\times\vec{b})_y=a_z b_x-a_x b_z=(3)(2)-(-1)(-1)=5$ e

$(\vec{a}\times\vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x = (-1)(1) - (0)(2) = -1$. Nel caso, invece, di $\vec{b}\times\vec{a}$, otteniamo: $(\vec{b}\times\vec{a})_x = b_y a_z - b_z a_y = 3$, $(\vec{a}\times\vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z = -5$ e $(\vec{a}\times\vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x = 1$. Quindi otteniamo la seguente proprietà $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

9. Dati i vettori $\vec{a}$ = (-1, 0, 0), $\vec{b}$ = (1, 1, -1) e $\vec{c}$ = (-1, 1, 3), calcolare $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

- Combinando l'espressione del prodotto scalare con quella per il prodotto vettoriale si ottiene: $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_x(\vec{b}\times\vec{c})_x + a_y(\vec{b}\times\vec{c})_y + a_z(\vec{b}\times\vec{c})_z = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + \\ + a_z(b_x c_y - b_y c_x) = -4$$

10. I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, appartenenti al piano yz (con y, z > 0), hanno lo stesso modulo ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$) ma formano con l'asse z, rispettivamente un angolo di 30° e 60°. Calcolare le componenti del vettore $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$.

- Dato che i vettori appartengono al piano yz le loro componenti lungo l'asse x sono nulle. Quindi: $\vec{a} = (0, |\vec{a}|\sin 30°, |\vec{a}|\cos 30°)$ e $\vec{b} = (0, |\vec{b}|\sin 60°, |\vec{b}|\cos 60°)$. I vettori risultanti sono $$\vec{a}+\vec{b} = (0, |\vec{a}|\sin 30° + |\vec{b}|\sin 60°, |\vec{a}|\cos 30° + |\vec{b}|\cos 60°) = \frac{5}{2}(0, 1+\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1)$$ e $$\vec{a}-\vec{b} = (0, |\vec{a}|\sin 30° - |\vec{b}|\sin 60°, |\vec{a}|\cos 30° - |\vec{b}|\cos 60°) = \frac{5}{2}(0, 1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-1).$$

11. Dati il vettore $\vec{a}$ = (-1, 0, 3) ed una famiglia di vettori $\vec{b}$ = (2, 1, *k*) con *k* ε **R**. Calcolare *k* tale che $\vec{b}$ sia ortogonale ad $\vec{a}$. Per quale valore di *k* il modulo di $\vec{a}\times\vec{b}$ ha un estremo.

- Se i vettori sono ortogonali abbiamo $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Quindi $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)(2) + (0)(1) + (3)(k) = -2 + 3k = 0. \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ Calcoliamo il modulo di $\vec{a}\times\vec{b}$: $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6+k)^2 + (-1)^2} = \\ = \sqrt{46 + 12k + k^2}.$$

  Infine, calcolando la derivata prima di $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ rispetto al parametro *k*, si ottiene quanto richiesto: $k = -6$.

12. Calcolare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ = (-1, 0, 3) e $\vec{b}$ = (0, 1, 3).

- L'angolo tra due vettori è esprimibile in termini del prodotto scalare. Infatti: $\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$

13. Dato il vettore $\vec{a}$ = (-1, -5, 0) calcolare l'angolo formato tra $\vec{a}$ e l'asse x.

- Dato che il vettore appartiene al piano xy, l'angolo è dato da $\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right)$

14. Un vettore $\vec{a}$ di modulo 5 è diretto verso est, mentre un vettore $\vec{b}$ di modulo 4 è diretto verso nord-ovest. Calcolare i vettori $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ ed i rispettivi moduli.

- Le componenti di $\vec{a}$ sono (5, 0) e di $\vec{b}$ sono $(4\cos 135°, 4\sin 135°) = 2\sqrt{2}(-1,1)$. Infine le componenti dei vettori somma e differenza sono $(5 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e $(5 + 2\sqrt{2}, - 2\sqrt{2})$.