UNIVERSITA' DEL SANNIO

CORSO DI FISICA 1

ESERCIZI + SVOLGIMENTO – CINEMATICA II

1. Un oggetto si muove su una traiettoria circolare. Determinare di quanto varia la velocità quando l'oggetto passa da un punto P della circonferenza al punto Q, diametralmente opposto a P, sapendo che i due vettori $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ hanno lo stesso modulo v.

- Il vettore $\vec{v}_Q$ essendo diametralmente opposto al vettore $\vec{v}_P$ presenta stessa direzione ma verso opposto (ovviamente stesso modulo). Quindi il vettore variazione $\Delta\vec{v}$ corrisponde alla differenza tra il vettore finale $\vec{v}_Q = -\vec{v}_P$ e $\vec{v}_P$: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P = -2\vec{v}_P$.

2. Un treno percorre in 10 s la curva da A a B, variando di 90° la direzione del proprio vettore velocità: da $\vec{v}_A$ a $\vec{v}_B$. Il modulo dei vettori prima e dopo è di 30 m/s. Calcolare la direzione, il verso e l'intensità dell'accelerazione.

- Il treno deve coprire un angolo di 90° in 10 s. Quindi la velocità angolare è $\omega = \frac{\pi/2}{10s} = \frac{\pi}{20}\frac{rad}{s}$. Il raggio di curvatura deve essere tale che $v = \omega r \Rightarrow r = \frac{v}{\omega}$. L'accelerazione centripeta è $a_c = \omega^2 r = \omega v = \frac{\pi}{20}\frac{rad}{s} \cdot 30\frac{m}{s} = \frac{3\pi}{2}\frac{m}{s^2}$. La direzione del vettore accelerazione è la stessa del vettore $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. L'angolo formato dal vettore accelerazione con il vettore $\vec{v}_A$ è di 135°. Quanto detto è di facile comprensione una volta disegnati i vettori velocità.

3. Calcola il periodo e la velocità scalare di un punto che si trova sul bordo di un disco a 33 giri (la frequenza è quindi di 33 giri al minuto). Il diametro del disco

è 30 cm. Sapendo che l'etichetta ha un diametro di 10 cm, ripetere lo stesso calcolo per un punto che si trova sul bordo dell'etichetta.

- Essendo la frequenza di 33 giri/min, in termini di Hz abbiamo $f=\frac{33}{60}\frac{1}{s}=\frac{11}{20}Hz$, il periodo T corrisponde all'inverso della frequenza. Quindi $T=\frac{1}{f}=\frac{20}{11}s=1{,}8s$. Ora la pulsazione angolare in termini del periodo è data da $\omega=\frac{2\pi}{T}$. La velocità scalare è $v=\omega r=\frac{2\pi}{T}r=2\pi fr=17{,}27\frac{cm}{s}$ (sul bordo dell'etichetta). La velocità sul bordo del disco $v=51{,}81\frac{cm}{s}$.

4. Calcolare l'accelerazione centripeta di un oggetto che viaggia, a velocità costante, lungo una circonferenza di raggio r = 5 cm con frequenza di 5 Hz.

- L'accelerazione centripeta è data da $a_c=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r=4\pi^2 f^2 r=49{,}29\frac{m}{s^2}$.

5. Un punto gira alla velocità di 0,3 m/s. Sapendo che il periodo è uguale a 1 min, calcolare l'accelerazione centripeta del punto.

- Il raggio in termini del periodo e della velocità: $v=\omega r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)r\Rightarrow r=\frac{vT}{2\pi}$. L'accelerazione centripeta è $a_c=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r=\frac{2\pi v}{T}=0{,}03\frac{m}{s^2}$.

6. Un corpo cade da una certa altezza partendo da fermo. Sapendo che alla fine della corsa la sua velocità è di 14 m/s, determinare l'altezza e la durata di caduta.

- La legge oraria di un corpo in caduta libera partendo da fermo con lo zero a terra è $s(t)=h-\frac{1}{2}gt^2$, dove h è l'altezza di partenza. Il corpo giunge a terra dopo un intervallo di tempo pari a $t^*=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. La velocità invece aumenta linearmente con il tempo. Nell'istante di tempo in cui tocca a terra il corpo abbiamo: $v(t^*) = gt^* = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$. Quindi nel nostro caso abbiamo $h = \frac{v(t^*)^2}{2g} = \frac{14^2}{2 \cdot 9{,}8} m = 10m$ ed il tempo di caduta è $t^* = 1{,}43s$.

7. Due proiettili sono sparati orizzontalmente da una altezza di 400 m alle velocità, rispettivamente, di 10 m/s e 20 m/s. Quanto tempo impiega il primo proiettile per arrivare a terra? Ed il secondo? Qual è il modulo della loro velocità nell'istante in cui toccano il suolo?

- Come dall'esercizio precedente il tempo di caduta è lo stesso per entrambi i corpi e vale $\sqrt{\frac{2h}{g}} = 9s$ dove h è l'altezza. Lungo l'asse x il moto avviene in modalità uniforme quindi nell'istante di impatto la componente x della velocità varrà, rispettivamente, 10 m/s e 20 m/s. Per la componente y, invece, la velocità, ovviamente, sarà la stessa per entrambi i corpi e vale $\sqrt{2gh} = 88{,}54m/s$. Il modulo della velocità è dato in un caso da $\sqrt{(88{,}54m/s)^2 + (10m/s)^2} = 89m/s$ e nell'altro da $\sqrt{(88{,}54m/s)^2 + (20m/s)^2} = 91m/s$.

8. Che velocità iniziale deve avere un oggetto lanciato nel vuoto dal basso verso l'alto per raggiungere l'altezza di 22 m?

- La velocità del corpo in fase di salita sarà data da $v(t) = v_0 - gt$, mentre la legge oraria è data da $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Il tempo per arrestare il moto per l'alto è dato da $t^* = \frac{v_0}{g}$, quindi lo spazio percorso è $y(t^*) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$. IL problema è del tutto simmetrico a richiedere quale sia la velocità con cui un corpo giunge a terra lasciato cadere da un'altezza nota. Otteniamo nel nostro caso $v_0 = \sqrt{2gh} = 20{,}76m/s$.

9. Un cacciatore tira orizzontalmente ad un bersaglio che giace alla stessa quota a distanza d = 200 m. Egli manca il bersaglio. Determinare di quanto manca il

bersaglio per effetto della gravità sapendo che la velocità iniziale con cui esce il proiettile dalla canna è v_0 = 300 m/s.

- Il moto lungo l'asse x è sempre il solito moto rettilineo uniforme $x(t) = v_0 t$. La proiezione del moto lungo l'asse x giungerà nel punto di ascissa *d* nell'istante $t^* = d / v_0$. Il moto lungo l'asse y può essere rappresentato come $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$. Da notare che abbiamo posto il nostro cacciatore nell'origine del sistema di riferimento. Quindi quando la freccia giunge come proiezione lungo l'asse x sul bersaglio la coordinate y non è più nulla bensì ha assunto il valore $y(t^*) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{g d^2}{v_0^2}$. Possiamo concludere che il bersaglio è mancato per $\frac{g d^2}{2 v_0^2} = 2{,}18 m$.

- Un corpo è soggetto ad un'accelerazione vettoriale data da $\vec{a}(t) = \alpha t^2 \hat{i} + \beta \cos(\lambda t) \hat{j}$, dove α, β e λ sono costanti dimensionali. Determinare le dimensioni delle costanti. Individuare la legge oraria del moto. Individuare la relazione che lega le varie costanti tali che il vettore accelerazione e quello posizione siano ortogonali all'istante di tempo *t* = 0.

- Calcoliamo la velocità come integrale dell'accelerazione: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \hat{i} \int \alpha t^2 dt + \hat{j} \int \beta \cos(\lambda t) dt = \hat{i} \left(\frac{\alpha t^3}{3} + v_{ox} \right) + \hat{j} \left(\frac{\beta}{\lambda} \sin(\lambda t) + v_{oy} \right)$. La legge oraria è ottenuta come segue
$$\vec{s}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \hat{i} \int \left(\frac{\alpha t^3}{3} + v_{ox} \right) dt + \hat{j} \int \left(\frac{\beta}{\lambda} \sin(\lambda t) + v_{oy} \right) dt = \hat{i} \left(\frac{\alpha t^4}{12} + v_{ox} t + s_{0x} \right) + \\ + \hat{j} \left(-\frac{\beta}{\lambda^2} \cos(\lambda t) + v_{oy} t + s_{0y} \right)$$
. Il prodotto scalare tra il vettore accelerazione e quello posizione all'istante *t* = 0 è dato da

$\vec{s}(0)\cdot\vec{a}(0)=\left(-\frac{\beta}{\lambda^2}+s_{0y}\right)\beta$. I due vettori sono ortogonali se $\beta=0$ oppure se $\beta=\lambda^2 s_{0y}$.