UNIVERSITA' DEL SANNIO

CORSO DI FISICA 1

ESERCIZI – Dinamica dei sistemi di punti materiali

1. Un sistema fisico è costituito da tre punti materiali di massa m_1 = 60 g, m_2 = 15 g, m_3 = 25 g, i cui vettori posizione rispettivamente sono $\mathbf{r}_1 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (1, 3, 0)$ e $\mathbf{r}_3 = (3, 2, 0)$. Calcolare le coordinate del centro di massa.

- I tra punti giacciono sul piano xy (z = 0). Quindi le coordinate del centro di massa sono: $x_{CM} = (60 \times 2 + 15 \times 1 + 25 \times 3) / (60 + 15 + 25) = \ldots = 2{,}1$ m; $y_c = \ldots$

2. Trovare il centro di massa di una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza l.

- Il centro di massa si trova al centro C della sbarretta, Ciò risulta facilmente dalla considerazione che per ogni elemento dx a distanza x da C alla sinistra di C, esiste un elemento dx a distanza x da C alla destra di C. Essendo la sbarretta omogenea, questi due elementi hanno la stessa massa $dm = \lambda\, dx$, e dunque il loro centro di massa è nel punto centrale C. Poiché l'intera sbarretta è scomponibile in coppie di elementi simmetrici, il centro di massa complessivo sarà anch'esso in C. A presta conclusione si perviene ovviamente anche effettuando il calcolo esplicito. Si ha infatti (tenendo conto che $\lambda = M/l$ = costante): $x_{CM} = \frac{\int_0^l x\lambda dx}{M} = \frac{M}{l}\frac{\int_0^l x dx}{M} = \ldots = \frac{l}{2}$. Da notare che si è assunto implicamene l'origine dell'asse x coincidesse con l'estremo della sbarretta.

3. Un punto materiale A, di massa m_A, si muove su una traiettoria circolare di raggio R_A con velocità angolare costante ω, occupando all'istante iniziale la posizione $(0, R_A)$. Un punto materiale di massa m_B si muove con la stessa velocità angolare ma su una circonferenza di raggio R_B occupando all'istante iniziale la posizione $(- R_B, 0)$. Calcolare l'accelerazione del centro di massa.

- Il centro di massa ha coordinate $\begin{cases} x_{CM}(t) = \dfrac{m_A x_A(t) + m_B x_B(t)}{m_A + m_B} \\ y_{CM}(t) = \dfrac{m_A y_A(t) + m_B y_B(t)}{m_A + m_B} \end{cases}$; le leggi orarie dei punti A e B sono $\begin{cases} x_A(t) = R_A \cos(\omega t + \pi/2) \\ y_A(t) = R_A \sin(\omega t + \pi/2) \end{cases}$ e $\begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega t - \pi) \\ y_A(t) = R_B \sin(\omega t - \pi) \end{cases}$. Quindi, per il centro di massa otteniamo

$$\begin{cases} x_{CM}(t) = \dfrac{m_A R_A \cos(\omega t + \pi/2) + m_B R_B \cos(\omega t - \pi)}{m_A + m_B} = \dfrac{-m_A R_A \sin(\omega t) - m_B R_B \cos(\omega t)}{m_A + m_B} \\ y_{CM}(t) = \dfrac{m_A R_A \sin(\omega t + \pi/2) + m_B R_B \sin(\omega t - \pi)}{m_A + m_B} = \dfrac{m_A R_A \cos(\omega t) - m_B R_B \sin(\omega t)}{m_A + m_B} \end{cases}.$$

La traiettoria del centro di massa si ottiene eliminando il tempo dalle leggi orarie per esempio per quadratura e somma. Si ottiene in questo caso $x_{CM}{}^2 + y_{CM}{}^2 = \dfrac{m_A{}^2 R_A{}^2 + m_B{}^2 R_B{}^2}{(m_A + m_B)^2} = R_{CM}{}^2$. Dunque la distanza $R_{CM} = \sqrt{x_{CM}{}^2 + y_{CM}{}^2}$ del centro di massa dall'origine del riferimento non dipende dal tempo. Si tratta di traiettoria di raggio R_c = 10,76 cm. Il moto del centro di massa è dunque un moto circolare uniforme di velocità angolare ω = 2 rad /s e quindi la sua accelerazione sarà centripeta e di modulo $\omega^2 R_c$. = 0,43 m/s^2.

4. Su un piano orizzontale privo di attrito sono posti due blocchi di massa M_1 = 2 Kg e M_2 = 3 Kg. Tra i due blocchi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un filo di collegamento tra i blocchi. Ad un certo istante il filo viene tagliato ed i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla. Si osserva che la velocità acquisita dalla massa M_1 è v_1 = 0,5 m/s. Qual è l'energia elastica della molla nella sua configurazione iniziale?

- Per la conservazione della quantità di moto si ha $M_1\ v_1 + M_2\ v_2 = 0$. La conservazione dell'energia meccanica nella fase di decompressione della molla implica la seguente relazione: $U_{in} = ½\ M_1\ v_1^2 + ½\ M_2\ v_2^2$. Dalla prima relazione $v_2 = -\ v_1\ M_1 / M_2$, quindi troviamo che $U_{in} = \ldots = ½\ M_1\ v_1^2\ (1+ M_1 / M_2)$ = 0,42 J.

5. Trovare il centro di massa di una sbarretta non omogenea di massa totale M e lunghezza l, la cui densità lineare di massa sia approssimabile come $\lambda = a + b\,x$.

- La coordinata del centro di massa è data da $x_{CM} = \dfrac{\int_0^l x\lambda dx}{M} = \dfrac{\int_0^l x(a+bx)dx}{M} = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{al^2}{2} + \dfrac{bl^3}{3}\right)$; ma la massa è tale che deve valere $M = al + \dfrac{bl^2}{2}$. Quindi $x_{CM} = \dfrac{1}{al + \dfrac{bl^2}{2}}\left(\dfrac{al^2}{2} + \dfrac{bl^3}{3}\right) = \dfrac{l}{3}\dfrac{3a + 2bl}{2a + bl}$. Notare che se b fosse nullo otterremmo $x_{CM} = \dfrac{l}{2}$: il caso della sbarretta con densità costante.

6. Un cannone ed una riserva di palle (la cui massa sia m) sono posti all'interno di un vagone ferroviario chiuso (la cui massa sia M). Il cannone spara verso destra ed il vagone rincula a sinistra: le palle da cannone, dopo aver colpito la parte più lontana ricadono all'interno del vagone. Dimostrare che, indipendentemente da come vengono sparate le palle da cannone, il vagone

non può spostarsi di un tratto maggiore della sua lunghezza L, supponendo che parta da fermo.

- Sia M la massa complessiva del vagone ferroviario e del cannone, m la massa complessiva delle palle che vengono sparate. Siano X_1 e x_1, rispettivamente, le coordinate del centro di massa del sistema (vagone + cannone) e delle palle, prima dello sparo, in un sistema di riferimento solidale al suolo; X_2 e x_2, le corrispondenti coordinate dopo lo sparo. Poiché la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla, la coordinata del cento di massa del sistema complessivo ha lo stesso valore prima e dopo lo sparo: $(M + m)\, x_{CM} = M X_1 + m x_1 = M X_2 + m x_2$ oppure anche $M (X_1 - X_2) = m (x_2 - x_1)$. Ma $x_2 - x_1 = D$ è lo spostamento subito dal vagone verso sinistra, mentre lo spostamento delle palle verso destra è $x_2 - x_1 = L - D$. Dalle due ultime formule si ottiene: $M D = m (L - D)$ ossia $D = m L / (M + m)$.

7. Un cane di massa m è fermo su una zattera distante L dalla riva. Esso cammina per un tratto l sulla zattera verso la riva e poi si ferma. La zattera ha una massa M e possiamo trascurare l'attrito tra la zattera e l'acqua. Quanto dista il cane dalla riva alla fine del suo spostamento sulla zattera?

- Il centro di massa del sistema zattera + cane deve rimane fermo per via della risultante nulla delle forze applicate. Indicando con m_1 e m_2 rispettivamente la massa del cane e della zattera e con x_1 e x_2, le distanze dalla riva dei rispettivi baricentri, si ha dunque: $m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x'_1 + m_2 x'_2$ dove x'_1 e x'_2 sono le distanze dopo lo spostamento. Lo spostamento del cane rispetto alla riva è $\Delta x_1 = x'_1 - x_1$ e $\Delta x_2 = x'_2 - x_2$. Possiamo quindi riscrivere la prima equazione come $m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0$. Lo spostamento del cane rispetto alla zattera è la differenza dei due spostamenti: $d = \Delta x_1 - \Delta x_2 =$ - 3 m. Dal sistema delle due equazioni si ricava: è $\Delta x_1 = m_2 d / (m_1 + m_2) =$ - 2,4 m. Il cane quindi si è avvicinato alla riva di 2,4 m e si trova pertanto ad una distanza da essa $x_1 =$ 3,6 m.

8. Due corpi, ciascuno costituito da una serie di pesetti, sono connessi con una leggera corda che passa attraverso una carrucola di peso trascurabile, di 5 cm di diametro. Non vi è nessun attrito. I due corpo sono inizialmente allo stesso livello e ciascuno ha una massa di 500 g: a) trovare la posizione del centro di massa; b) Si trasferiscono 20 g da un corpo all'altro senza permettere al sistema di muoversi. Indicare la nuova posizione del centro di massa; c) si lasciano ora liberi i due corpi. Descrivere il moto del centro di massa e determinare la sua accelerazione.

- Scelto un sistema di riferimento con l'origine nel punto medio fra i due corpi, le coordinate di questi sono: $x_1 = - x_2 = D / 2 =$ 2,5 cm. La posizione del centro di massa è data quindi da $x_{CM} = \ldots = 0$. Il centro di massa si trova quindi nel punto medio tra le due massa, come sempre quando le masse sono uguali. Le due masse hanno ora i valori di $m_1 = 480$ g e $m_2 = 520$ g. Poiché le coordinate dei due corpi non sono variate, il centro di massa si trova ora sulla loro congiungente, nel punto di coordinata x_{CM} = (480 2,5 + 520 2,5) / (1000) = -0,1 cm. A riprova del calcolo fatto, si osservi che il nuovo centro di massa divide il segmento che congiunge i due corpi in due parti di lunghezza 2,6 cm e 2,4 cm, cioè nel rapporto inverso delle masse. Le forze che agiscono sul sistema dei due corpo sono i pesi, diretti verso il basso e le tensioni dei due capi delle corde, tra loro eguali, dirette verso l'alto. La risultante delle forze esterne ha quindi modulo: $F = m_1\ g$ è $m_2\ g - 2\ T$ ed è diretta verticalmente verso il basso. La tensione T della fune vale $T = (2\ m_1\ m_2)\ g\ /\ (m_1 + m_2)$. Otteniamo quindi dalla precedente equazione $F = (m_1 - m_2)^2\ g\ /\ (m_1 + m_2)$. Per la legge del moto del centro di massa, l'accelerazione del centro di massa ha il modulo di $a_{CM} = F\ /\ M = (m_1 - m_2)^2\ g\ /\ (m_1 + m_2)^2$ = 0,016 m/s^2. Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato su una retta verticale a 0,1 cm a sinistra dell'origine delle coordinate.

9. Una mitragliatrice spara pallottole di 50 g ad una velocità di 1 Km/s. Il mitragliere che tiene in mano la macchina può esercitare una forza media di 180 N sulla mitragliatrice. Determinare il massimo numero di pallottole che può sparare al minuto.

- Ad ogni pallottola viene impressa una quantità di moto pari a $\Delta p = m\ v = ... =$ 50 Kg m /s. Sia ora $\nu = d\ n\ /\ d\ t$ il numero di pallottole che vengono sparate nell'unità di tempo. La variazione di quantità di moto del sistema (mitragliatrice + pallottole) nell'unità di tempo è quindi $d\ p\ /\ d\ t = \nu\ m\ v$. La quantità ora calcolata è eguale alla risultante delle forze esterne applicate al sistema, cioè alla forza esercitata dal mitragliatore. Abbiamo quindi: $Fest = d\ p\ /\ d\ t = \nu\ m\ v$ da cui $\nu = Fext\ /\ (m\ v) = \ldots$ = 216 pallottole / min.

10. Un vagone ferroviario di peso P può scorrere senza attrito su una rotaia rettilinea ed orizzontale. Inizialmente un uomo di peso p sta in piedi sul vagone che sta muovendosi con velocità costante v_0 (verso destra). Qual'è la variazione di velocità del vagone se l'uomo corre verso sinistra con velocità v_{rel}, relativa al carro, nell'istante in cui raggiunge l'estremità e salta giù?

- Poiché non vi sono attriti ed il vagone si muove di moto rettilineo e orizzontale (tutte queste condizioni sono essenziali) la risultante delle forse esterne applicate al sistema (uomo + vagone) dev'essere eguale a zero. In tali condizionasi conserva la quantità di moto del sistema. Siano M ed m le masse del vagone e dell'uomo, rispettivamente, v ed u le loro velocità all'istante del salto. La quantità di moto iniziale, quando uomo e vagone hanno la stessa velocità v_0, è $P_0 = (M + m)\ v_0$. La quantità di moto all'istante del salto è $P_s = M\ v + m\ u$ e poiché la velocità relativa è la differenza delle due velocità cioè $v_{rel} + v = u$, l'equazione $P_0 = P_s$ diventa $(M + m)\ v_0 = M\ V + m\ v_{rel} + m\ v$ da cui $\Delta\ v = v - v_0 = -\ m\ v_{rel}\ /(M + m)$. Poiché le mass sono proporzionali ai pesi, il risultato si può anche scrivere, utilizzando i dati del problema: $\Delta\ v = -\ p\ v_{rel}\ /(P + p)$.