UNIVERSITA' DEL SANNIO

CORSO DI FISICA 1

ESERCIZI – Dinamica dei corpi rigidi

1. La molecola di ossigeno ha una massa di 5,3 × 10 $^{-26}$ Kg ed un momento di inerzia di 1,94 × 10 $^{-46}$ Kg m^2 rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare alla congiungente i due atomi. Supponiamo che una tale molecola in un gas abbia una velocità media di 500 m/s e che la sua energia cinetica rotazionale sia 2/3 dell'energia cinetica traslazionale. Trovare la sua velocità angolare media.

- Scriviamo le espressioni dell'energia cinetica rotazionale: $K_r = ½\ I\ \omega^2$ e di quella traslazionale $K_t = ½\ M\ v^2$ ed imponiamo che la condizione K_r = 2/3 K_t; si ottiene l'equazione: $½\ I\ \omega^2 = 1/3\ M\ v^2$ da cui si ricava $\omega = (2\ M\ v^2\ /\ 3\ I\ )^{1/2}$ = …

2. Un'alta ciminiera si spacca alla base e si abbatte. Esprimere (a) l'accelerazione radiale media e (b) quella tangenziale della cima della ciminiera in funzione dell'angolo θ compreso tra la ciminiera con la verticale.

- Trattiamo la ciminiera come un'asta rigida omogenea di massa M e lunghezza L, girevole intorno ad un asse passante per un suo estremo. Applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica, supponendo di poter trascurare le forze dissipative. Inizialmente il sistema ha solo energia potenziale: $E = U_i = ½\ M\ g\ L$ e l'energia cinetica è nulla. Nell'istante in cui la ciminiera è inclinata di un angolo θ la sua energia totale è $E = U_f + K_f = ½\ M\ g\ L \cos\theta + ½\ I\ \omega^2$. Eguagliando le due espressioni e sapendo che il momento di inerzia in questo caso vale $1/3\ M\ L^2$ otteniamo: $\omega = (3\ g\ (1 - \cos\ \theta)\ /\ L\ )^{1/2}$. L'accelerazione radiale della cima è quella di un punto che descrive un moto circolare di raggio L e velocità angolare ω: $a_r = \omega^2\ L = 3\ g\ (1 - \cos\ \theta)$. Dato che l'accelerazione angolare $\alpha = d\omega\ /dt$, otteniamo che $a_t = L\alpha = L\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)} = L\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \ldots = \frac{3g}{2}\sin\theta$.

3. Un blocco di 3 Kg è posto su un piano inclinato di 30° sull'orizzonte ed è collegato, con una corda parallela al piano che passa attraverso una carrucola sulla cime del piano, ad un altro blocco sospeso del peso di 9 Kgf. La carrucola pesa 1 Kgf ed ha una raggio di 9,9 cm. Il coefficiente di attrito dinamico tra blocco è piano è 0,1. Trovare l'accelerazione del blocco sospeso e la tensione della fune da una parte e dall'altra delle carrucola. Si supponga la carrucola un disco omogeneo.

- Sia m_1 = 3 Kg e m_2 = 9 Kg le masse dei due blocchi. Per la seconda legge di Newton si ha $\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin\theta - \mu m_1 g \cos\theta = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases}$. Da notare che le due tensioni sono in generale diverse se, essendovi attrito statico tra le corde e la carrucola, quest'ultima viene messa in moto con un'accelerazione angolare non nulla. Una terza equazione mettendo un relazione l'accelerazione angolare $\alpha = a / R$ col momento risultante delle forze esterne ad essa applicate $\tau = (T_2 - T_1) R$: $(T_2 - T_1)R = I\alpha = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{MRa}{2} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{Ma}{2}$. Da questa equazione e dalle due precedenti si ricavano le tre grandezze incognite: $\begin{cases} a = \dfrac{m_2 g - m_1 g \sin\theta - \mu m_1 g \cos\theta}{M/2 + m_1 + m_2} = 5{,}7 m/s^2 \\ T_2 = m_2(g - a) = 36{,}9 N \\ T_1 = T_2 - \dfrac{1}{2}Ma = 34 N \end{cases}$.

4. Un cilindro di lunghezza L e raggio R ha un peso P. Due corde avvolte attorno al cilindro, una a ciascuno estremo, e lo sostengono essendo fissate a due ganci al soffitto. Il cilindro è trattenuto in posizione orizzontale con le due corde verticali ed è lasciato libero. Trovare la tensione delle corde mentre si svolgono e l'accelerazione lineare del cilindro.

- Applichiamo le due equazioni cardinali della dinamica $\begin{cases} \vec{F}_{est} = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{M}_{est} = I\vec{\alpha} \end{cases}$. Le forze esterne si riducono al peso ed alla tensione complessiva delle corde (se la disposizione è simmetrica, ogni corda esercita una tensioni pari alla metà della tensione totale). Conviene calcolare il momento delle forze esterne rispetto all'asse di contatto coi tratti verticali di corda. L'unica forza avente momento non nullo è il peso. Il momento di inerzia I rispetto a quest'asse si ricava applicando il teorma di Huygens – Steiner: $I = I_{CM} + M R^2 = 3/2\ M R^2$. L'accelerazione del centro di massa è legata all'accelerazione angolare del cilindro dalla condizione di rotolamento $a_{CM} = \alpha R$. Le due equazioni fondamentali diventano allora esplicitamente $\begin{cases} Mg - T = Ma_{CM} \\ MgR = \dfrac{3}{2}MR^2\alpha \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a_{CM} = \dfrac{2}{3}g = 6{,}54 m/s^2 \\ T = M(g - a_{CM}) = \dfrac{1}{3}Mg \end{cases}$. I risultati sono del tutto indipendenti dal verso in cui avviene il moto del cilindro e sono quindi validi anche nel caso in cui il cilindro salga e le funi si avvolgano. Perché il fenomeno avvenga nel modo descritto, è essenziale che le funi siano esattamente verticali: solo in questo caso la risultante delle forze esterne (e quindi l'accelerazione del centro di massa) risulta verticale.

5. Una palla di biliardo è colpita da una stecca. La retta d'azione dell'impulso applicato è orizzontale e passa per il centro di massa. Sono noti la velocità iniziale v_0 della palla, il suo raggio R, la sua massa M ed il coefficiente di attrito μ tra la palla ed il tavolo. Di quanto si sposta la palla prima che termini lo scivolamento sul tavolo?

- Inizialmente la palla ha un moto puramente traslatorio e la sua quantità di moto è $P_0 = M v_0$. Sia v la velocità del centro di massa della palla nel momento in cui termina lo scivolamento sul tavolo ed il moto diventa di puro rotolamento con velocità angolare $\omega = v / R$. nell'intervallo di tempo t fra i due istanti considerati, la palla è stata sottoposta ad una forza di attrito costante, data da $f = - M g \mu$ ed ha pertanto subito una variazione di quantità di moto eguale all'impulso della forza $P - P_0 = M (v - v_0) = f t = - M g \mu t$ da cui otteniamo $t = (v - v_0) / (g \mu)$. Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato, con accelerazione $a_{CM} = f / M = - g \mu$. Le equazioni del moto sono pertanto: $v = v_0 - g \mu t$ e $x = v_0 t - ½ g t^2$. Da queste otteniamo lo spostamento percorso in termini delle velocità iniziali e finali: $x = (v_0^2 - v^2) / 2 g \mu$. Una relazione tra le due velocità si ottiene dalla legge di conservazione del momento angolare. Infatti, poichè tutte le forze esterne (peso, reazione vincolare, attrito) hanno momento nullo rispetto al punto di contatto, il momento angolare rispetto a questo punto si conserva. Possiamo quindi eguagliare il valore iniziale corrispondente al moto traslatorio con velocità v_0, ed il valore corrispondente di rotolamento: $M v_0 R = I \omega$ con $I = 7/5 M R^2$. Il momento di inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione passante per il punto di contatto si ottiene come sempre applicando il teorema di Huygens – Steiner. Quindi otteniamo $M v_0 R = 7/5 M R^2 v / R$ da cui $v = 5/7 v_0$. Sostituendo ora l'espressione di v in quella ricavata per lo spazio percorso si ottiene $x = (12 / 49) v_0^2 / g \mu$.

6. Un sottile tubo rigido, omogeneo, di massa M, ha al suo interno, in posizione simmetrica rispetto al tubo, un cilindro molto corto di massa m, di diametro appena inferiore a quello interno del tubo. Inizialmente tutto ruota con velocità angolare ω_0 intorno ad un asse, che passa per il baricentro del sistema (inizialmente il cilindretto è al centro) . Ad un certo istante, per una lievissima perturbazione, il cilindretto si sposta dalla posizione iniziale e viene espulso dal tubo. In assenza di forze esterne, qual è la velocità angolare ω del tubo, quando il cilindretto ne fuoriesce?

- Dato che il momento risultante esterno $\mathbf{M}^{(e)}$ è nullo otteniamo che $\mathbf{L}$ = costante. Quindi deve essere verificata la relazione $L^{(in)} = I_{tub}\, \omega_0 + L^{(in)}_{cil} = L^{(fin)} = I_{tub}\, \omega + l /2\, m\, (\omega\, l/2)$, dove abbiamo indicato con l la lunghezza del tubo. Inoltre data la piccola altezza del cilindretto il suo momento di inerzia è trascurabile: $L^{(in)}_{cil} = 0$, mentre il momento di inerzia vale $I_{tub} = (1/12) M l^2$. Infine il contributo al momento angolare totale da parte del cilindretto quando sta per uscire fuori è pari al prodotto del braccio (*l/2*) per la quantità di moto (*m l/2 ω*). Dunque otteniamo l'equazione $\frac{Ml^2}{12}\omega_0 = \frac{Ml^2}{12}\omega + \frac{ml^2}{4}\omega$ da cui $\omega = \frac{M}{M+3m}\omega_0$.

7. Due lastre piane, rigide, omogenee, quadrate, di densità superficiali σ_1 e σ_2 rispettivamente sono saldate lungo un lato (AB = *a*). Il sistema è appeso ad un asse orizzontale passante per A. Per effetto della gravità, ed in assenza di attriti, qual'è l'espressione dell'angolo formato, all'equilibrio, dal lato AB rispetto alla verticale?

- Dette m_1 ed m_2 le masse delle due lastre, per l'equilibrio si ha: $M^{(e)} = 0 = M_1 + M_2 = dm_1 g \sin\beta - dm_2 g \sin\alpha$ dove $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ è la distanza del centro di massa delle due lamine dal punto A, ed α e β sono gli angoli formati dal vettore d con i vettori della forza peso delle due lamine. In particolare gli angoli sono esprimibili come $\alpha = \frac{\pi}{4} - \theta$ e $\beta = \frac{\pi}{4} + \theta$ da cui otteniamo $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$ e $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$. Quindi otteniamo $$\begin{aligned} m_1 \sin\beta - m_2 \sin\alpha &= m_1(\cos\theta + \sin\theta) - m_2(\cos\theta - \sin\theta) = \\ &= \sigma_1(\cos\theta + \sin\theta) - \sigma_2(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \end{aligned}$$ e risolvendo rispetto all'angolo abbiamo $\theta = \arctan\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}\right)$.

8. Una molla di costante elastica *k* è disposta orizzontalmente ed è fissata da un lato ad una struttura fissa mentre dall'altra è attaccata ad una corda di massa trascurabile. Questa corda passa nella gola di una carrucola cilindrica di massa *M* e raggio *R* ed all'altra sua estremità vi è una massa *m* soggetta alla forza peso. Non vi sono attriti e la corda è in estensibile. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della massa *m* nel suo moto lungo la verticale.

- L'equilibrio si ha per un'elongazione y_0 della molla rispetto alla posizione di riposo tale che: $m\,g = k\,y_0$. Per il corpo *m* si ha $\tau_1 = m\,g - m\,a$. Per òa carrucola invece abbiamo $M^{(e)} = R\,(\tau_2 - \tau_1) = -I\,\alpha = -I\,a\,/\,R$. Notare che abbiamo preso positivo il momento $R\,\tau_2$ perché tende a far ruotare in senso antiorario. Il segno negativo al termine $I\,\alpha$ tiene conto dell'effetto di richiamo della molla. Per uno spostamento *y* rispetto alla posizione di equilibrio y_0 si ha $\tau_2 = k\,(y + y_0)$; quindi $R\,(\tau_2 - \tau_1) = R\,[k\,(y + y_0) - m\,g + ma] = -I\,a\,/\,R$ da cui $ky + ma = -\frac{I}{R^2}a$ da cui otteniamo un'equazione differenziale per un moto periodico $\ddot{y} + \left(\frac{2k}{M+2m}\right)y = 0$. Quindi la pulsazione è data da $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M+2m}}$ ed il periodo è $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{2k}}$. Abbiamo utilizzato per il momento di inerzia il valore ½ $M\,R^2$.

9. Calcolare il momento d'inerzia di una ruota di bicicletta rispetto all'asse passante per il centro *C* e ortogonale al piano della ruota. Si trascuri, rispetto al raggio *R*, lo spessore del cerchione, la massa dei raggi e del mozzo, cosicché tutta la massa della ruota possa essere considerata concentrata, omogeneamente, sulla circonferenza di raggio *R*.

- L'espressione per il momento di inerzia è data in generale da $I = \int h^2 dm = \lambda \int_0^{2\pi R} R^2 dl$, dove $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$ è la densità di materia lungo la circonferenza, e *dl* è l'elemento infinitesimo di circonferenza relativo alla massa infinitesima *dm*. Abbiamo sostituito nell'integrale ad *h* il raggio *R* poiché tutta la materia essendo confinata sulla circonferenza la distanza media della materia stessa è proprio *R* dall'asse rispetto al quale calcoliamo il momento d'inerzia. Infine l'integrale va esteso a tutta la zona in cui è presente della materia quindi integrando su una circonferenza dovremo considerare come estremi 0 e *2 π R*. Quindi $I = \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} R^2 dl = \frac{MR}{2\pi} \int_0^{2\pi R} dl = MR^2$.

10. Calcolare il momento di inerzia di un disco di massa M e raggio R, rispetto all'asse baricentrale ortogonale al piano del disco.

- L'impianto è simile al problema precedente, tuttavia ora abbiamo un integrale di superficie da risolvere. La densità di materia è ancora una volta costante $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. Il momento di inerzia vale $I = \int h^2 dm = \sigma \int h^2 dS$. Immaginiamo di suddividere il disco in tante corone circolari, di cui la generica ha raggio *r* e spessore *dr*. Si allora *h = r* e *dS = 2 π r dr*, per cui otteniamo: $I = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$.